

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

ECUACIONES RACIONALES

a)

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \quad \text{Solución: } x = \frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{3}{x} = 1 + \frac{x+13}{6} \quad \text{Solución: } x_1 = 9 \quad x_2 = -2$$

$$\frac{3}{x-1} + \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x+1} \quad \text{Solución: } x = -1$$

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS

BICUADRADAS

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$$

$$y^2 - 5y - 36 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 = -4 \rightarrow \text{no hay solución}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = -4 \rightarrow \text{no hay solución} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 3, x_2 = -3$$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$$

1º

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$x^4 - 10x^2 + 9$$

$$x^2 = t$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$\nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9$
 $\searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1$

$$x^2 - 9 \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 - 1 \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

2º

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$$

$\nearrow t_1 = 16$
 $\searrow t_2 = 9$

$$x^2 - 16 \quad x = \pm\sqrt{16}$$

$\nearrow x_1 = 4$
 $\searrow x_2 = -4$

$$x^2 - 9 \quad x = \pm\sqrt{9}$$

$\nearrow x_3 = 3$
 $\searrow x_4 = -3$

3º

$$x^4 - 61x^2 + 900 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 61t + 900 = 0$$

$$t = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm 11}{2}$$

$\nearrow t_1 = 36$
 $\searrow t_2 = 25$

$$x^2 - 36 \quad x = \pm\sqrt{36}$$

$\nearrow x_1 = 6$
 $\searrow x_2 = -6$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$x^2 - 25 \quad x = \pm\sqrt{25} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = -5 \end{array}$$

4°
 $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow t_1 = 16 \\ \searrow t_2 = 9 \end{array}$$

$$x^2 = 16 \quad x = \pm\sqrt{16} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = -4 \end{array}$$

$$x^2 = 9 \quad x = \pm\sqrt{9} \begin{array}{l} \nearrow x_3 = 3 \\ \searrow x_4 = -3 \end{array}$$

5°
 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{array}{l} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{array}$$

$$x^2 = 9 \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 = 1 \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

6°

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$\nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9$$

$$\searrow t_2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$x^2 = 9 \quad x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} \nearrow x_3 = 2 \\ \searrow x_4 = -2 \end{cases}$$

GRADO MAYOR QUE 2:

$$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$$

Las soluciones son: $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$$

Las raíces son: $x = 3/2$ y $x = 1$

$$6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$$

Las raíces son: $x = -2$, $x = 1/2$ y $x = 1/3$

A) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -7 \quad 8 \quad -3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad 2 \quad -5 \quad 3 \\ \hline 2 \quad -5 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

$$(x - 1) \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$P(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -5 \quad 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad 2 \quad -3 \\ \hline 2 \quad -3 \quad 0 \end{array}$$

$$(x - 1)^2 \cdot (2x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \quad 0 \\ 1 \end{array}$$

$$(x - 1)^2 \cdot (2x - 3) = 0$$

Las raíces son: $x = 3/2$ y $x = 1$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

B) $x^3 - x^2 - 4 = 0$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & & & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{array}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2) = 0$
 $x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2) = 0$
Raíz: $x = 2$.

Ecuaciones Radicales:

a) $\sqrt{2x+5} - x = 3$ $s \rightarrow x = -2$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 2$ $s \rightarrow x = 4$

c) $\sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4}$ $s \rightarrow x = 5$

d) $\sqrt{4x+13} + 2 = \sqrt{-2x+3}$ $s \rightarrow x = 1/9$

$x = -3$

e) $\sqrt{12-x} = x+8$ $s \rightarrow x = -13$

$x = -4$

f) $7x + 1 = 2\sqrt{x+4}$ $s \rightarrow x = 5$

ECUACIONES LOGARITMICAS

1) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

$\log [2(11 - x^2)] = \log(5 - x)^2$

$2(11 - x^2) = (5 - x)^2$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = 3 \quad 11 - 3^2 > 0 \quad 5 - 3 > 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \quad 5 - \frac{1}{3} > 0$$

$$2) \quad 2 \log x = 3 + \log \frac{x}{10}$$

$$2 \log x = 3 + \log x - \log 10$$

$$\log x = 3 - 1 \quad \log x = 2 \quad x = 100$$

$$3) \quad \log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$$

$$\log[x(x + 3)] = \log(x + 1)^2$$

$$x(x + 3) = (x + 1)^2$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \quad x = 1$$

$$4) \quad \frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$$

$$\log(16 - x^2) = 2 \log(3x - 4)$$

$$\log(16 - x^2) = \log(3x - 4)^2 \quad (16 - x^2) = (3x - 4)^2$$

$$10x^2 - 24x = 0 \quad x = 0 \quad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$5) \quad 2 \log x = 3 + \log \frac{x}{10}$$

$$2 \log x = 3 + \log x - \log 10$$

$$\log x = 3 - 1 \quad \log x = 2 \quad x = 100$$

$$6) \quad \log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$$

$$\log[x(x + 3)] = \log(x + 1)^2$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$x(x+3) - (x+1)^2$$

$$x^2 + 3x - x^2 - 2x + 1 \quad x - 1$$

7) $4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x$

$$\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 - \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2 \quad \log\left(\frac{x^4}{625} \cdot \frac{625}{4}\right) = \log x^2$$

$$\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log x^2 \quad \frac{x^4}{4} = x^2 \quad x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x - 0 \quad x - -2 \quad x - 2$$

8) $2\log x - 2\log(x+1) = 0$

$$\log x^2 - \log(x+1)^2 = \log 1$$

$$\log \frac{x^2}{(x+1)^2} = \log 1 \quad \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$2x + 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{Sin solución}$$

9) $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$

$$(\log x)^2 + \log x - 2 = 0 \quad \log x = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad t = 1 \quad t = -2$$

$$\log x = 1 \quad x = 10$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$\log x = -2 \quad x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

10) $\log(25 - x^3) - 3\log(4 - x) = 0$

$$\log(25 - x^3) = \log(4 - x)^3 \quad (25 - x^3) = (4 - x)^3$$

$$25 - x^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

$$12x^2 - 48x + 39 = 0 \quad x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

11) $\frac{\log(35 - x^2)}{\log(5 - x)} = 3$

$$\log(35 - x^2) = 3\log(5 - x)$$

$$\log(35 - x^2) = \log(5 - x)^3 \quad (35 - x^2) = (5 - x)^3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x = 2 \quad x = 3$$

12) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$

$$\log[2(11 - x^2)] = \log(5 - x)^2$$

$$2(11 - x^2) = (5 - x)^2$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = 3 \quad 11 - 3^2 > 0 \quad 5 - 3 > 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \quad 5 - \frac{1}{3} > 0$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$13) \log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$$

$$(\log_5 x)^2 - \frac{7}{2} \log_5 x + \log_5 125 = 0$$

$$2(\log_5 x)^2 - 7 \log_5 x + 6 = 0 \quad \log_5 x = t$$

$$2t^2 - 7t + 6 = 0 \quad t = 2 \quad t = \frac{3}{2}$$

$$\log_5 x = 2 \quad x = 25$$

$$\log_5 x = \frac{3}{2} \quad x = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$

Una **ecuación exponencial** es aquella **ecuación** en la que la **incógnita** aparece en el **exponente**.

Para **resolver una ecuación exponencial** vamos a tener en cuenta:

$$1) a > 0 \quad a \neq 1$$

$$2) a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones exponenciales

$$A) 2^{2x-1} = 4$$

$$2^{2x-1} = 2^2 \quad 2x - 1 = 2 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$B) 2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$$

$$2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28$$

$$2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2} \right) = 28$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$2^x \cdot \frac{7}{2} = 28 \quad 2^x = 2^3 \quad x = 3$$

$$2^x \cdot 2 = 1024 \quad 2^x = 2^9 \quad x = 9$$

$$C) 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$2^x = t \quad 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} & 2^x = \frac{1}{2} \\ t_2 = 1 & 2^x = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$D) 2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$$

$$2 - \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x = t$$

$$2 - \frac{1}{t} + 3 \cdot t = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \quad 3^x = -1 \quad \text{sin solución}$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad x = -1$$

$$E) 4^{3x} = 8^x + 3$$

$$(2^2)^{3x} = 2^{3x} + 3$$

$$2^{3x} = t$$

$$t^2 - t - 3 = 0 \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$2^{3x} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

1

$$\begin{cases} 3^{2x+y} = 3^7 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad x = 3 \quad y = 1$$

2

$$\begin{cases} \frac{2^{2x-3}}{2^{3y+2}} = 2^0 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$$

$$2^{2x-3} = 2^0 \cdot 2^{3y+2}$$

$$2x - 3 = 0 + 3y + 2 \quad 2x - 3y = 13$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases} \quad x = 5 \quad y = -1$$

3

$$\begin{cases} 5^x \cdot 25^y = 5^7 \\ 2^{x-1} \cdot 2^{y+2} = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x \cdot 5^{2y} = 5^7 \\ 2^{x-1} \cdot 2^{y+2} = 2^6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5^{x+2y} = 5^7 \\ 2^{x-1+y+2} = 2^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - 1 + y + 2 = 6 \end{cases}$$

$$x = 3 \quad y = 2$$

4

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 9 \end{cases}$$

$$u = 2^x \quad v = 5^y$$

$$\begin{cases} u + v = 9 \\ \frac{u}{2} + 5v = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 9 \\ u + 10v = 18 \end{cases}$$

$$u = 8 \quad v = 1$$

$$2^x = 8 \quad x = 3$$

$$5^y = 1 \quad y = 0$$

5

$$\begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^{x-1} - 2^{y-2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ \frac{3^x}{3} - \frac{2^y}{4} = 1 \end{cases} \quad 3^x - u \quad 2^y - v$$

$$\begin{cases} u - 2v = 1 \\ 4u - 3v = 12 \end{cases} \quad u = 9 \quad v = 8$$

$$3^x = 9 \quad x = 2$$

$$2^y = 8 \quad y = 3$$

6

$$4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$$

$$2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+2} \quad 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} + 2$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$x = 3$$

7

$$3^{x^2-1} = 134$$

$$\log 3^{(x^2-1)} = \log 134$$

$$(x^2 - 1)\log 3 = \log 134$$

$$x^2 - 1 = \frac{\log 134}{\log 3} = 4.4582 \quad x^2 = 5.4582 \quad x = 12.336$$

8

$$4^x \cdot 2 = 3^x \cdot 243$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{243}{2} \quad \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{243}{2}$$

$$x \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{3}\right) = \log_{\frac{4}{3}} \frac{243}{2}$$

$$x = \frac{\log \frac{243}{2}}{\log \frac{4}{3}} = 16.685$$

9

$$3^x \cdot 5^{2x} = 150$$

$$\log(3^x \cdot 5^{2x}) = \log 150 \quad \log 3^x + \log 5^{2x} = \log 150$$

$$x \log 3 + 2x \log 5 = \log 150 \quad x(\log 3 + 2 \log 5) = \log 150$$

$$\log 3 + 2 \log 5 = \log 3 + \log 5^2 = \log(3 \cdot 5^2) = \log 75$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$x = \frac{\log 150}{\log 75} = 1.16$$

10

$$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$$

$$2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28$$

$$2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2} \right) = 28$$

$$2^x \cdot \frac{7}{2} = 28 \quad 2^x = 2^3 \quad x = 3$$

11

$$3^{1-x} - 3^x = 2$$

$$\frac{3}{3^x} - 3^x = 2 \quad 3^x = t$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad t_1 = 1 \quad 3^x = 1 \quad x = 0$$
$$t_2 = -3 \quad 3^x = -3 \quad \bar{x}$$

12

$$2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$$

$$2 - \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x = t$$

$$2 - \frac{1}{t} + 3 \cdot t = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \quad 3^x = -1 \quad \text{sin solución}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$t_2 = \frac{1}{3} \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad x = -1$$

13

$$4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$$

$$2^{2x-2} + 2^{x+2} = 48 \quad \frac{2^{2x}}{4} + 4 \cdot 2^x - 48 = 0 \quad t = 2^x$$

$$t^2 + 16t - 192 = 0 \quad \begin{cases} t = 8 \\ t = -24 \end{cases}$$

$$8 = 2^x \quad x = 3$$

14

$$4^{3x} = 8^x + 3$$

$$(2^2)^{3x} = 2^{3x} + 3$$

$$2^{3x} = t$$

$$t^2 - t - 3 = 0 \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2^{3x} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$3x \log 2 = \log \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{\log \frac{1 + \sqrt{13}}{2}}{3 \log 2} = 0.441$$

$$2^{3x} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{No tiene solución}$$

15

$$e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$e^x - \frac{5}{e^x} + \frac{4}{e^{3x}} = 0 \quad e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0 \quad e^{2x} = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad \begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} e^{2x} = 1 \\ e^{2x} = 4 \end{array} \quad \ln e^{2x} = \ln 4 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\ln 4}{2} \end{array}$$

16

$$2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$$

$$2^{2x} = t$$

$$t^2 - t - 12 = 0 \quad \begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^{2x} = 4 \\ 2^{2x} = -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{no} \end{array}$$

17

$$2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$$

$$2 - \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$$

$$3^x = t$$

$$2 - \frac{1}{t} + 3 \cdot t = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \quad 3^x = -1 \quad \text{sin solución}$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad x = -1$$

18

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \dots + 2^x = \frac{127}{8}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$\frac{127}{8} = \frac{2^x \cdot 2 - \frac{1}{8}}{2 - 1}$$

$$\frac{127}{8} = \frac{16 \cdot 2^x - 1}{8}$$

$$2^x = \frac{128}{16}$$

$$2^x = 2^3 \quad x = 3$$

19

$$10^{x+2} = 5$$

$$\log 10^{x+2} = \log 5$$

$$(x+2)\log 10 = \log 5$$

$$(x+2) = \log 5$$

$$x = \log 5 - 2 = -1.3010$$

Sistema de ecuaciones de 2º grado

1º Ejercicio resuelto

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x + y = 7$$

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1º Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.

$$y = 7 - x$$

2º Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

3º Se resuelve la ecuación resultante.

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

4° Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

$$x = 3 \quad y = 7 - 3 \quad y = 4$$

$$x = 4 \quad y = 7 - 4 \quad y = 3$$

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas:

$$1) \left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - 5xy = 25 \end{array} \right\} \quad \text{Solución: } x = -1, y = 3 ; x = 3, y = -1$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ (x - 2)^2 + 3y = 18 \end{array} \right\} \quad \text{Solución: } x = 5, y = 3 ; x = -4, y = -6$$

$$3) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 12 \\ 2x + 3y = 14 \end{array} \right\} \quad \text{Solución: no tiene}$$

4)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 160 \\ x + y = 17 \end{array} \right. \quad \text{Solución: } x = 5, y = 12 ; x = 12, y = 5$$

5)

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \quad \text{Solución: } x = 2, y = 3 ; x = 3, y = 2$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

6)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Solución: $x = 3, y = -1$; $x = -3, y = 1$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$

Solución: $x = 5, y = 2, -2$;
 $x = -5, y = 2, -2$

8) $x^2 - y^2 = 7$

Solución: $x = 4, y = 3$

$-x + y = -1$

9) $\begin{cases} x - y = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Solución $x = -2, y = 1$
 $x = -1, y = 2$

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$$

$$\frac{x}{y} = 10 \quad x = 10y$$

$$100y^2 - y^2 = 11$$

$$y^2 = \frac{11}{99} = \frac{1}{9} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} & x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{3} & \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$2 \log x = 4$$

$$\log x = 2 \quad x = 10^2 \quad x = 100$$

$$2 + \log y = 3$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$\log y = -1 \qquad y = 10^{-1} \qquad y = 10^{-10}$$

$$c) \begin{cases} \log_x (y - 18) = 2 \\ \log_y (x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y - 18 \\ y^{\frac{1}{2}} = x + 3 \end{cases}$$

$$y = (x + 3)^2 \qquad x^2 = (x + 3)^2 - 18$$

$$x = \frac{9}{2} \qquad y = \frac{225}{4}$$

$$d) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \\ \hline 2 \log x = 4 \end{cases}$$

$$\log x = 2 \qquad x = 10^2 \qquad x = 100$$

$$2 + \log y = 3$$

$$\log y = 1 \qquad y = 10^1 \qquad y = 10$$

$$e) \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\log \left(\frac{x}{y} \right) = \log 10$$

$$\frac{x}{y} = 10 \qquad x = 10y$$

$$100y^2 - y^2 = 11$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$y^2 = \frac{11}{99} = \frac{1}{9} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} & x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log x + 2\log y = 5 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$$

$$4\log x = 5 \quad \log x = \frac{5}{4} \quad x = 10^{\frac{5}{4}} = 10\sqrt[4]{10}$$

$$\frac{5}{4} + \log y = 3 \quad \log y = \frac{7}{4} \quad y = 10^{\frac{7}{4}} = 10\sqrt[4]{1000}$$

g)
$$\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\log(xy) = \log 2 \quad xy = 2 \quad x = \frac{2}{y}$$

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5 \quad y^4 - 5y^2 + 4 = 0$$

$$y^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} y^2 = 4 & \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ y^2 = 1 & \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = 2 \quad x = 1$$

$$y = 1 \quad x = 2$$

h)
$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

$$\log(xy) = \log 100 \quad xy = 100 \quad x = \frac{100}{y}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
HOJA DE REFUERZO DE ECUACIONES Y SISTEMAS

$$\frac{100}{y} - y = 20 \quad y^2 + 20y - 100 = 0$$

$$y = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 400}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2} = -10 + 10\sqrt{2}$$

$$y = 10(\sqrt{2} - 1) \quad x = 10(\sqrt{2} + 1)$$

$$\text{Log}10 + \text{log}xy = 4$$

$$\text{Log}x - \text{log}y = 1$$

$$\text{log}xy = 4 - 1$$

$$\text{Log}x - \text{log}y = \text{log}10$$

$$\text{Log}x + \text{log}y = 3$$

$$\text{Log}x - \text{log}y = 1$$

$$2\text{log}x = 4 \quad ; \quad \text{log}x = 2 \quad ; \quad \text{log}x = \text{log}100 \quad ; \quad x = 100$$

$$\text{Log}100 - \text{log}y = 1 \quad ; \quad -\text{log}y = -1 \quad ; \quad \text{log}y = \text{log}10 \quad ;$$

$$Y = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{log}x - \text{log}y = 2 \\ \frac{x}{y^2} = 25 \end{array} \right\}$$

Solución

La primera ecuación se puede escribir: $\log(x/y) = 2$, por las propiedades de los logaritmos.

Entonces: $(x/y) = 100$ y por lo tanto $x = 100y$

Si $x/y^2 = 25$ entonces $x = 25y^2$

igualando $100y = 25y^2$, de donde $25y(y-4) = 0$, cuya única solución es $y = 4$ (ya que y no puede ser 0) con lo cual $x = 400$

$$\left. \begin{array}{l} \text{log}x - \text{log}y = 1 \\ \text{log}x + \text{log}y = 3 \end{array} \right\}$$

Solución

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$2\text{log}x = 4$ de donde $\text{log}x = 2$ y la $x = 100$ (ya que se trata de logaritmo decimal)

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2 + \text{log}y = 3$ de donde $\text{log}y = 1$ y por tanto $y = 10^1$